

控制时滞对负刚度 Duffing 系统动力学特性的影响

李辉光¹, 刘恒¹, 杨利花^{1,2}, 虞烈¹

(1. 西安交通大学机械电子及信息系统研究所, 710049, 西安; 2. 兰州交通大学机电工程学院, 730070, 兰州)

摘要: 对时滞反馈控制负刚度 Duffing 系统的动力学特性进行了研究. 以时滞量为参数, 通过分析对应线性系统特征方程的根的分布, 讨论了平凡解的稳定性, 得到了平凡解发生 Hopf 分岔而失稳的临界时滞量以及临界时滞量与系统控制参数的关系. 采用数值方法研究了时滞对系统强迫振动的影响, 结果表明时滞量的增加不仅导致系统稳态周期运动的振幅增加, 而且会导致出现概周期运动、多倍周期运动等复杂的动力学行为, 并能引起系统失控. 因此, 在系统控制环节设计时应充分考虑时滞的影响.

关键词: Duffing 系统; 负刚度; 时滞; 分岔; 稳定性

中图分类号: TH113.1; O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)07-0811-04

Effect of Control Delay on Dynamic Characteristics of Negative Stiffness Duffing System

Li Huiguang¹, Liu Heng¹, Yang Lihua^{1,2}, Yu Lie¹

(1. Institute of Mechatronics and Information System, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The dynamic characteristics of negative stiffness Duffing system with delayed feedback control are investigated. Choosing time delay as the control parameter, the stability of trivial equilibrium is discussed by analyzing distribution of the roots of the associated characteristic equation. It is found that Hopf bifurcation occurs from trivial equilibrium when the delay passes through critical values, then the critical values and their relations with system control parameters are obtained. The effect of time delay on the forced vibration of system is evaluated with numerical method. The results show that the amplitude of stable period motion increases, some complex dynamical behaviors such as quasi-periodic motion and multiple periodic motion may occur, and the system gets out of control with the increase of time delay. Therefore the effect of time delay ought to be taken into sufficient consideration in the design of system control loop.

Keywords: Duffing system; negative stiffness; time delay; bifurcation; stability

为了满足动力系统不断提高的性能指标, 要求对系统加以控制. 随着控制方法越来越复杂, 控制环节中的时滞已经不能忽略. 由于时滞系统的状态不仅依赖于当前, 而且依赖于过去一段时间, 具有复杂的动力学行为, 因此时滞已成为系统设计和动力学分析中应加以充分考虑的因素. 文献[1-2]利用中心流形方法研究了控制时滞对单自由度电磁轴承系统

的 Hopf 分岔的影响, 文献[3-5]研究了控制时滞对 van der Pol-Duffing 系统分岔响应的影响以及周期解失稳以后的复杂运动, 文献[6-7]利用多尺度法研究了时滞状态反馈控制下 Duffing 方程的强迫主共振和谐波共振. 上述研究均表明时滞对系统的动力学行为产生了显著影响.

负刚度 Duffing 方程是在电力和机械系统中广

泛应用的力学模型,具有丰富的动力学行为.本文以具有位移和速度时滞反馈控制的负刚度 Duffing 系统为对象,研究控制环节中的时滞对系统平凡解稳定性和强迫振动响应的影响,揭示了时滞对此类系统动力特性的影响.

1 时滞对平凡解稳定性的影响

具有时滞反馈控制的一类负刚度 Duffing 系统方程可表示为

$$\ddot{y} + k_d \dot{y}(t - \tau) - y + k_p y(t - \tau) - 2y^3 = f \cos(\omega t) \quad (1)$$

式中: $k_d, k_p > 0$, k_d, k_p 分别为速度和位移反馈控制系数; τ 为时滞量,为考察时滞对系统动力特性的影响,将其取为控制参数.

不考虑外激励力时,无论系统参数如何选取,平凡点始终是方程(1)的解,而且很多情况下平凡解是希望系统所处的位置,这里主要对平凡解的稳定性进行分析.由系统方程在平凡解(0,0)处的线性化方程可以得到相应的特征方程

$$\lambda^2 + k_d \lambda e^{-\lambda \tau} + k_p e^{-\lambda \tau} - 1 = 0 \quad (2)$$

显然,特征方程的特征根 λ 是参数 k_d, k_p 和 τ 的函数.由于复特征根成对出现,不失一般性,假设方程(2)的特征根为 $\lambda = \sigma + i\omega$,其中 σ 和 ω 是实数且 $\omega > 0$.利用欧拉公式将式(2)的实部和虚部分离得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 - \omega^2 + k_d e^{-\sigma \tau} (\sigma \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau) + \\ k_p e^{-\sigma \tau} \cos \omega \tau - 1 = 0 \\ 2\sigma\omega + k_d e^{-\sigma \tau} (\omega \cos \omega \tau - \sigma \sin \omega \tau) - \\ k_p e^{-\sigma \tau} \sin \omega \tau = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

特征方程(2)具有无穷多个特征根,使平衡点稳定的条件是所有的特征根具有负实部. $\text{Re}(\lambda) = 0$ 作为平衡点解失稳的临界条件,可能以下面两种途径发生.

第1种情况是特征值通过零点即 $\lambda = 0$,平衡点解将发生静态分岔.将 $\lambda = 0$ 代入特征方程(2),可得到 $k_p = 1$.

第2种情况是以一对非零特征值通过虚轴即 $\lambda = \pm i\omega$,平衡点解将可能发生 Hopf 分岔.此时,方程(3)简化为

$$\left. \begin{aligned} k_d \omega \sin \omega \tau + k_p \cos \omega \tau - \omega^2 - 1 = 0 \\ k_d \omega \cos \omega \tau - k_p \sin \omega \tau = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

利用三角函数关系消除 τ 后,得到关于 ω 的方程

$$\omega^4 + (2 - k_d^2) \omega^2 + 1 - k_p^2 = 0 \quad (5)$$

方程(5)的根为

$$\omega^2 = \frac{1}{2} [-(2 - k_d^2) \pm ((2 - k_d^2)^2 - 4(1 - k_p^2))^{1/2}] \quad (6)$$

从式(6)可以看出:

(1)当满足 $(2 - k_d^2)^2 - 4(1 - k_p^2) < 0$ 时,方程(5)无实根;

(2)当满足 $k_d^2 \leq 2$ 且 $k_p^2 < 1$ 时,方程(5)无实根;

(3)当满足 $k_p^2 > 1$ 时,方程(5)仅有一个正实根 $\omega_+ > 0$;

(4)当满足 $(2 - k_d^2)^2 - 4(1 - k_p^2) > 0, k_d^2 > 2$ 且 $k_p^2 < 1$ 时,方程(5)具有两个正实根 $\omega_+ > \omega_- > 0$.

在上述情况(4)下,对任意 $\tau \geq 0$,特征方程至少有一个正实部根,平衡点解是不稳定的^[2].这里只对实际系统中存在的情况(3)进行研究.由 $\lambda = i\omega_+$,利用方程(4)求得发生 Hopf 分岔时的临界时滞为

$$\tau_j = \frac{\theta_+}{\omega_+} + \frac{2j\pi}{\omega_+}$$

式中: $0 \leq \theta_+ \leq 2\pi; j = 0, 1, 2, \dots; \cos \theta_+ = \frac{k_p(1 + \omega_+^2)}{k_p^2 + k_d^2 \omega_+^2}; \sin \theta_+ = \frac{k_d \omega_+(1 + \omega_+^2)}{k_p^2 + k_d^2 \omega_+^2}$.

要使时滞量 τ 变化时系统平凡解出现 Hopf 分岔,还必须满足特征值以非零的速度穿过虚轴,即 $\text{Re}(d\lambda/d\tau)_{\lambda=i\omega_+} \neq 0$ ^[8].

对特征方程(2)关于 λ 求导,可得

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{k_d}{k_p \lambda + k_d \lambda^2} - \frac{\tau}{\lambda} + \frac{2}{(1 - \lambda^2)}$$

$$\text{sgn} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right]_{\lambda=i\omega} = \text{sgn} \left[\text{Re} \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right) \right]_{\lambda=i\omega} =$$

$$\text{sgn}(2k_p^2 + k_d^2 \omega^2 - k_d^2) \quad (7)$$

将 ω^2 的表达式代入式(7),可以判断出 $\text{Re}(d\lambda/d\tau)_{\lambda=i\omega_+}$ 的符号.对于式(7)

$$2k_p^2 + k_d^2 \omega^2 - k_d^2 > 2k_p^2 - k_d^2 - k_d^2(2 - k_d^2)/2 > 0$$

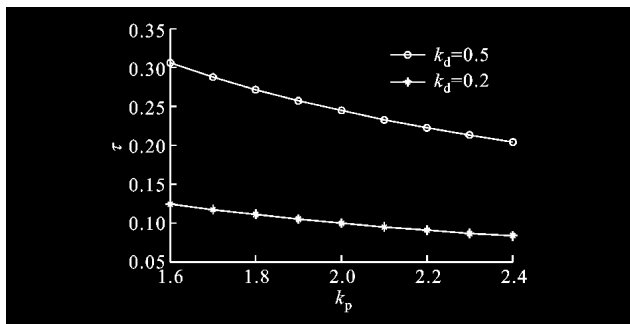
因为 $\tau = 0$ 时,特征方程均具有负实部,且随着时滞量的增加,特征值从左向右穿过虚轴,所以当 $\tau = \tau_0$ 时平衡点解将发生 Hopf 分岔.

平凡解在时滞-控制增益平面上的临界失稳边界如图1所示.当系统参数位于临界曲线以下时平凡解是稳定的,否则将发生 Hopf 分岔而失稳.从图中可以看出: k_d 一定时,随着 k_p 的增大,最小临界时滞量减小; k_p 一定时,随着 k_d 的增大,最小临界时滞量增大.

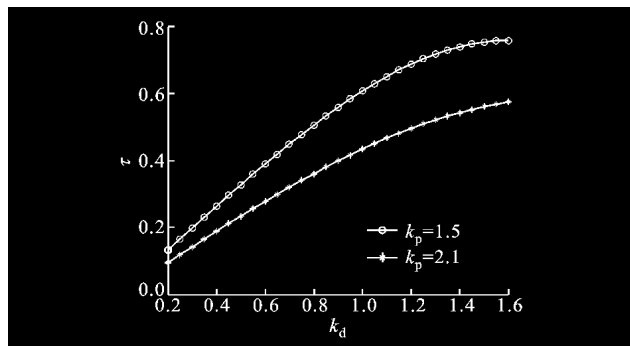
2 时滞对强迫振动的影响

从前面的理论分析得知,时滞可以导致系统的静平衡态失去稳定性而发生分岔. 本节以时滞量 τ

作为控制参数,采用数值积分的方法研究在周期性外力作用下,系统周期解随 τ 增加时的变化规律. 对非线性非自治系统(1),取参数 $k_d=0.6, k_p=2.1, f=0.05$,数值计算得到的结果如图2、图3所示.

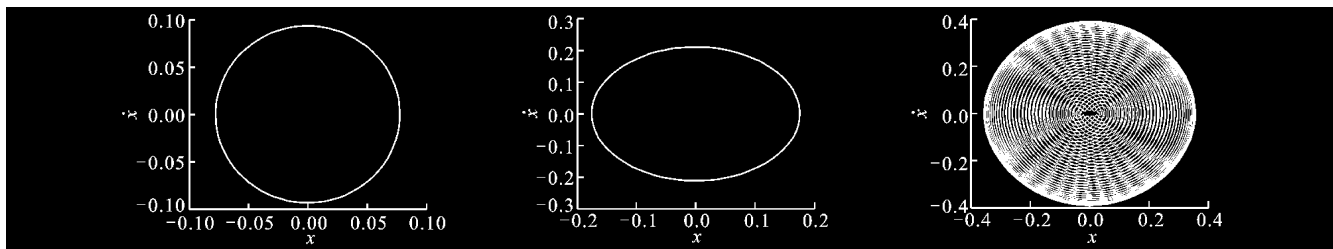


(a) 临界时滞与 k_p 的关系



(b) 临界时滞与 k_d 的关系

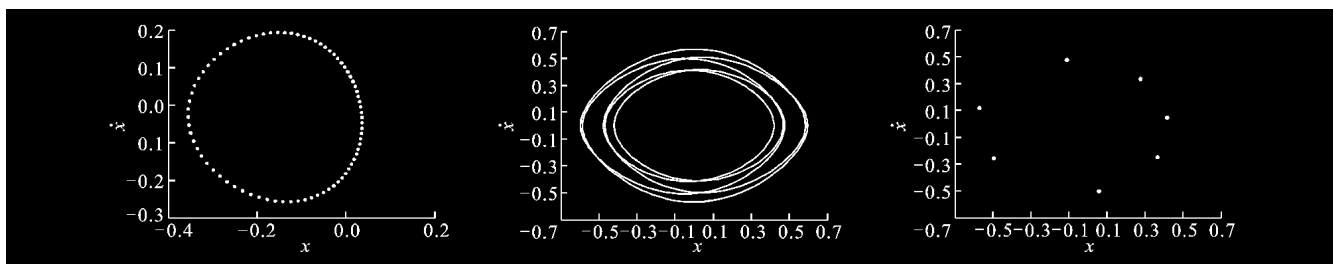
图1 平凡解在时滞-控制增益平面上的临界失稳边界



(a) $\tau=0.06$ 时的运动轨迹

(b) $\tau=0.24$ 时的运动轨迹

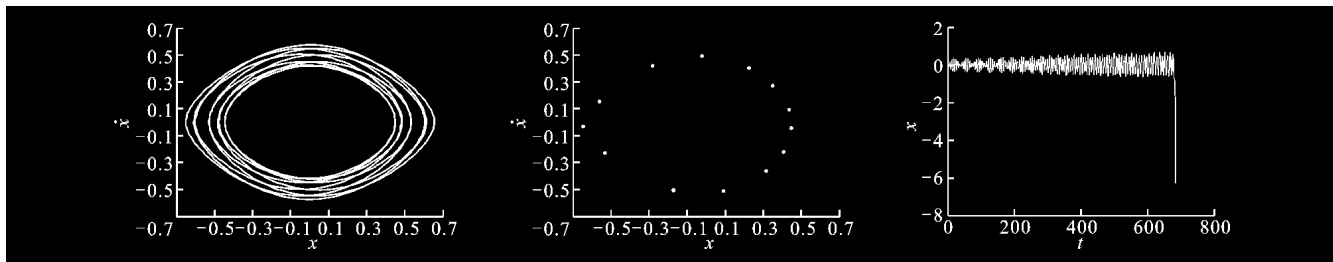
(c) $\tau=0.278$ 时的运动轨迹



(d) $\tau=0.278$ 时的 Poincaré 映射图

(e) $\tau=0.280 2$ 时的运动轨迹

(f) $\tau=0.280 2$ 时的 Poincaré 映射图



(g) $\tau=0.280 3$ 时的运动轨迹

(h) $\tau=0.280 3$ 时的 Poincaré 映射图

(i) $\tau=0.280 5$ 时的时间历程响应

图2 不同时滞量下的系统仿真图

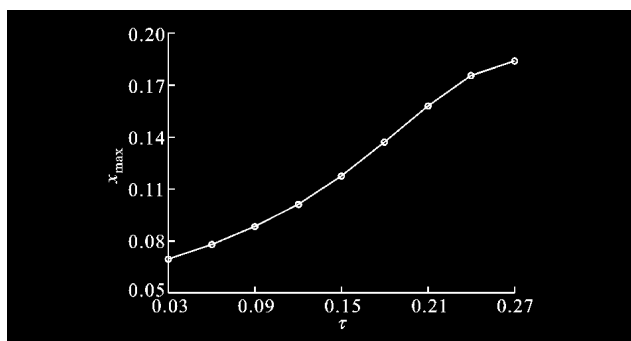


图3 时滞量 τ 与振幅峰值的关系

计算结果表明:当时滞量 τ 在 $0 \sim 0.277$ 的范围内变化时,系统保持稳定的周期 1 运动(图 2a、图 2b),而且随着 τ 的增大,系统的振幅将逐渐增大(图 3);当 τ 增大到 0.278 时,系统出现概周期运动(图 2c、图 2d),继续增大时滞量,系统将处于多倍周期运动状态(图 2e~图 2h);当 τ 增大到 0.280 5 时,随着时间的增加,系统振幅会逐渐增大而最终失去控制(图 2i)。

可以看出,作为控制参数,时滞可以导致非自治系统(1)的周期解失去稳定性,出现概周期运动、多倍周期运动等复杂的动力学现象。时滞还可以影响系统的振幅,使其逐渐增大,并在时滞达到一定值后导致系统振幅过大而失去控制。这是由于控制时滞的存在使得控制器接受调节信号后需要经过时间 τ 才能波及被调量,造成控制器输出的控制信号与系统实际所需的控制信号不一致,从而影响了整个系统的动力学行为。

3 结 论

以时滞量作为控制参数,通过对一类时滞反馈控制负刚度 Duffing 系统平凡解稳定性和强迫振动响应的研究,得到以下结论。

(1)随着时滞的增加,系统平凡解将发生 Hopf 分岔而失稳。发生分岔的临界时滞量随着 k_p 的增大

而减小,随着 k_d 的增大而增大。

(2)时滞不仅影响系统稳态周期运动的振幅,而且可以导致系统出现概周期运动等复杂的动力学行为,并能引起系统失控。因此,在系统控制环节设计时应充分考虑时滞的影响。

参考文献:

- [1] Ji J C. Stability and Hopf bifurcation of a magnetic bearing system with time delays[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 259(4):845-856.
- [2] Wang Hongbin, Liu Jiaqi. Stability and bifurcation analysis in a magnetic bearing system with time delays [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 26(3):813-825.
- [3] Xu J, Chung K W. Effects of time delayed position feedback on a van derPol-Duffing oscillator[J]. Physica: D, 2003, 180(1):17-39.
- [4] 钱长照,唐驾时. 一类非自治时滞反馈系统的分岔控制[J]. 物理学报, 2006, 55(2): 617-621.
Qian Changzhao, Tang Jiashi. Bifurcation control for a non-autonomous system with two time delays[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(2):617-621.
- [5] Li Xinye, Ji J C, Hansen C H, et al. The response of a Duffing-van derPol oscillator under delayed feedback control[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 291(3): 644-655.
- [6] Hu H Y, Dowell E H, Virgin L N. Resonance of a harmonically forced Duffing oscillator with time delay state feedback[J]. Nonlinear Dynamics, 1998, 15(4): 311-327.
- [7] Ji J C, Leung A Y T. Resonances of a non-linear s. d. o. f. system with two time-delays in linear feedback control[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 253(5): 985-1000.
- [8] Hale J K. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

(编辑 荆树蓉)